第 34 講　総合問題(2)

1　$x+y+z=n$（n は正の整数）を満たす正の整数の組（x，y，z）について，次の問いに答えよ．

(1)　$n=19$ のとき，（x，y，z）の組は何通りあるか．そのうち，x，y，z のいずれか 2 つが等しい組，$x \leqq y \leqq z$ を満たす組はそれぞれ何通りあるか．

(2)　n が 6 の倍数であるとき，$x \leqq y \leqq z$ を満たす（x，y，z）の組は何通りあるか．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2]　n を 3 以上の整数とする．1 から $3n$ までの番号が書かれた $3n$ 枚のカードを A さん，B さん，C さんの 3 人に n 枚ずつ配る．

(1)　カードの配り方は何通りあるか．

(2)　A さんのカードの番号の最小値が $n+1$ で，B さんのカードの番号の最小値が $2n-1$ である配り方は何通りあるか．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　区別できない9個の球をA，B，C，Dの4つの箱のいずれかに入れる．A，B，C，Dに入れた球の個数をそれぞれa，b，c，dとし，$X=1000a+100b+10c+d$とする．Xのとり得る値を小さい順に並べたときに31番目にくる数を求めよ．また，Xが4桁の数となる球の入れ方は何通りあるか求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　総合問題(2)

(1)　$a+b+c=6m$，　$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の組は
［アイ］m^2+［ウ］$m+1$ 通りある．

(2)　(1)のうち，$a=b$ を満たすものは［エ］$m+1$ 通りあり，a，b，c のどの２つも異なるものは［オカ］m^2 通りある．

(3)　$a+b+c=6m$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のうち，$0\leqq a<b<c$ を満たす組は［キ］m^2 通りであり，$0\leqq a\leqq b\leqq c$ を満たす組は［ク］m^2+［ケ］$m+1$ 通りある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第34講　総合問題(2)

1　$x+y+z=n$（n は正の整数）を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$n=19$ のとき，$(x,\ y,\ z)$ の組は何通りあるか．そのうち，$x,\ y,\ z$ のいずれか2つが等しい組，$x \leqq y \leqq z$ を満たす組はそれぞれ何通りあるか.

(2)　n が6の倍数であるとき，$x \leqq y \leqq z$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組は何通りあるか.

(1)　$x+y+z=19$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組の数は，○19個を1列に並べ，その間18か所中2か所に3つに仕切るための棒を1本ずつ入れる総数で，${}_{18}C_2=$**153（通り）**

このうち，$x=y$ となるものは　$x=y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$　の9通り.

$y=z,\ z=x$ となるものも同数.

また，$x=y=z$ になることはない.

よって，$x,\ y,\ z$ のいずれか2つが等しい組は　$9\times3=$**27（通り）**

$x \leqq y \leqq z$ になるときを考える.

$x=y<z$ となるのは　$x=y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$　の6通り

$x<y=z$ となるのは　$y=z=7,\ 8,\ 9$　の3通り

$x,\ y,\ z$ がすべて異なるとき

$x,\ y,\ z$ の大小は $x<y<z,\ x<z<y,\ y<x<z,\ y<z<x,\ z<x<y,\ z<y<x$ の6通りで，これらを満たす $x,\ y,\ z$ の組はすべて同数存在する.

よって　$x<y<z$　となるのは　$(153-27)\times\dfrac{1}{6}=21$（通り）

以上より　$x \leqq y \leqq z$ となるのは　$6+3+21=$**30（通り）**

(2)　$n=6m$　（m は自然数）とおくと，$x+y+z=6m$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組は

$${}_{6m-1}C_2=\frac{(6m-1)(6m-2)}{2}=(6m-1)(3m-1)\ （通り）$$

このうち，$x=y$　となるものは　$x=y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3m-1$　の $3m-1$ 通り

$y=z,\ z=x$ も同数ある.

$x=y=z$ となるのは　$x=y=z=2m$ の1通り

よって，$x,\ y,\ z$ の少なくとも2つが等しいのは　$(3m-1)\times3-2=9m-5$（通り）

したがって，$x<y<z$ となるのは

$$\{(6m-1)(3m-1)-(9m-5)\}\cdot\frac{1}{6}=3m^2-3m+1\ （通り）$$

また，$x=y<z$ となるのは　$x=y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2m-1$　の $2m-1$ 通り

$x<y=z$ となるのは　$y=z=2m+1,\ 2m+2,\ \cdots\cdots,\ 3m-1$　の $m-1$ 通り

以上より，求める総数は　$(3m^2-3m+1)+(2m-1)+(m-1)+1=3m^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}n^2}$ **（通り）**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n を 3 以上の整数とする．1 から $3n$ までの番号が書かれた $3n$ 枚のカードを A さん，B さん，C さんの 3 人に n 枚ずつ配る．

(1)　カードの配り方は何通りあるか．

(2)　A さんのカードの番号の最小値が $n+1$ で，B さんのカードの番号の最小値が $2n-1$ である配り方は何通りあるか．

(1)　${}_{3n}C_n\times{}_{2n}C_n=\dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}\cdot\dfrac{(2n)!}{n!n!}=\boldsymbol{\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}}$ **(通り)**

(2)　$n\geqq 3$ のとき　$(2n-1)-(n+1)=n-2>0$ より　$2n-1>n+1$

B さんのカードの番号の最小値が $2n-1$ であるのは，B さんが $2n-1$ のカードの他に，$2n$ から $3n$ までの $n+1$ 枚のカードから $n-1$ 枚選ぶときで

$${}_{n+1}C_{n-1}=\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}=\frac{1}{2}n(n+1)\ (\text{通り})$$

次に，A さんのカードの番号の最小値が $n+1$ であるのは，A さんが $n+1$ のカードの他に，$n+2$ から $3n$ までの $2n-1$ 枚より B さんの選んだ n 枚を除く残り $n-1$ 枚から $n-1$ 枚選ぶときで，1 通りのみ．

さらに残った n 枚のカードが C さんのカードとなる．

よって求める場合の数は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(n+1)}$ **(通り)**

3　区別できない 9 個の球を A，B，C，D の 4 つの箱のいずれかに入れる．A，B，C，D に入れた球の個数をそれぞれ a，b，c，d とし，$X=1000a+100b+10c+d$ とする．X のとり得る値を小さい順に並べたときに 31 番目にくる数を求めよ．また，X が 4 桁の数となる球の入れ方は何通りあるか求めよ．

X が 1 桁になるのは　$a=b=c=0$，$d=9$ のときのみで，1 通り

X が 2 桁になるのは　$a=b=0$，$c+d=9$，$c\geqq 1$ のとき

　よって　$(c,\ d)=(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ \cdots\cdots,\ (9,\ 0)$ の 9 通り

X が 3 桁になるのは　$a=0$，$b+c+d=9$，$b\geqq 1$ のとき

　$b=1$ のとき　$c+d=8$ より　$(c,\ d)=(0,\ 8),\ (1,\ 7),\ \cdots\cdots,\ (8,\ 0)$ の 9 通り

　$b=2$ のとき　$c+d=7$ より　$(c,\ d)=(0,\ 7),\ (1,\ 6),\ \cdots\cdots,\ (7,\ 0)$ の 8 通り

ここまでで，$1+9+9+8=27$ (通り) ある．

よって 31 番目は，$b=3$，$c+d=6$　を満たし，小さい方から 4 番目の数である．

　$(c,\ d)=(0,\ 6),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ \cdots\cdots$ より　31 番目の数は **333**

X が 4 桁になるのは

　$a+b+c+d=9$，$a\geqq 1$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$，$d\geqq 0$　を満たす整数 a，b，c，d の組

　つまり　$(a-1)+b+c+d=8$，$a-1\geqq 0$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$，$d\geqq 0$　を満たす組である．

それは　○ 8 個とそれを 4 つに仕切る棒 3 本の順列の総数に等しい.

したがって求める場合の数は　$\dfrac{11!}{8!3!}={}_{11}\mathrm{C}_3=\mathbf{165}$ **（通り）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 34 講　総合問題(2)

(1)　$a+b+c=6m$，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の組は

［アイ］m^2+［ウ］$m+1$ 通りある．

(2)　(1)のうち，$a=b$ を満たすものは［エ］$m+1$ 通りあり，a，b，c のどの 2 つも異なるものは［オカ］m^2 通りある．

(3)　$a+b+c=6m$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のうち，$0\leqq a<b<c$ を満たす組は［キ］m^2 通りであり，$0\leqq a\leqq b\leqq c$ を満たす組は［ク］m^2+［ケ］$m+1$ 通りある．

(1)　$6m$ 個の○とそれを 3 つに区切る 2 本の棒の順列の総数で

$${}_{6m+2}\mathrm{C}_2=\frac{(6m+2)(6m+1)}{2\cdot 1}=(3m+1)(6m+1)=\mathbf{18}m^2+\mathbf{9}m+1\quad(\text{通り})$$

(2)　(1)のうち，$a=b$ を満たすものは

$a=b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3m$　の　$\mathbf{3}m+1$ 通りある．

$b=c$，$c=a$ も同数である．

また，$a=b=c$ を満たすものは　$(2m,\ 2m,\ 2m)$ の 1 通り．

したがって，(1)を満たすもので，a，b，c のうち少なくとも 2 つが等しいものは

$(3m+1)\times 3-2=9m+1$（通り）　である．

ゆえに(1)を満たすもので，a，b，c のどの 2 つも異なるものは

$18m^2+9m+1-(9m+1)=\mathbf{18}m^2$（通り）　である．

(3)　$a+b+c=6m$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のうち，$0\leqq a<b<c$ を満たす組は，a，b，c のどの 2 つも異なるものの組数のうち，組合せとして同じものを 1 組と考えたものである．

よって(2)より　$\dfrac{18m^2}{3!}=\mathbf{3}m^2$（通り）

また，$a=b<c$　を満たすものが　$a=b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2m-1$ の $2m$ 通り

$a<b=c$　を満たすものが　$b=c=2m+1,\ 2m+2,\ \cdots\cdots,\ 3m-1,\ 3m$ の m 通り

これに　$a=b=c$　の 1 通りを合わせると，$0\leqq a\leqq b\leqq c$ を満たす組は

$3m^2+2m+m+1=\mathbf{3}m^2+\mathbf{3}m+1$（通り）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。